

suite du super-thm

COURS 5.2

10.10.24

Dét de matrices elem. n

$$1 \leq i \leq n$$

$$5) \det(D_i(k)) = k$$

$$(k \neq 0)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{ème ligne}$$

$$6) \det(E_{ij}(k))$$

$\downarrow$ j^{ème} colonne

$$1 \leq i, j \leq n$$

$$i \neq j$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{ème ligne}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$= 1$$

$$7) \det(P_{ij}) = -1$$

$$1 \leq i \neq j \leq n$$

$$i \neq j$$

Rappel: Addendum:

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

E matrice élem.

et A' la matrice obt. en faisant
la même opélem qe E

$$\text{alors } A' = E \cdot A$$

de la on déduit

$$5') \quad \forall k \neq 0 \quad A' = D_i(k) A$$

$$\det(A') \stackrel{\text{superthm}}{=} \det(D_i(k)) \det(A) = k \det(A)$$

$$6') \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad A' = E_{i,j}(k) \cdot A$$

$$\forall i, j \\ i \neq j$$

$$\text{alors } \det(A') = \det(A)$$

$$7') \quad \forall i, j \quad i \neq j \quad A' = P_{i,j} \cdot A$$

$$\text{alors } \det(A') = -\det(A)$$

Conséquence: On peut calculer $\det(A)$
en échelonnant A par des opérations
sur les lignes
en tenant compte des déterminants
des opérations utilisées:

Partant de A on fait p opérations:

$$A \xrightarrow{E_1} E_1 A \xrightarrow{E_2} E_2 E_1 A \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \underbrace{E_p \dots E_2 E_1 A}_{= U}$$

Ainsi $U = E_p \dots E_2 E_1 A$

matrice
échelonnée

$$\det(U) = \det(E_p) \dots \det(E_2) \det(E_1) \det(A) \quad (U = \text{upper triangular})$$

$$\boxed{\det(A) = \frac{\det(U)}{\prod_{i=1}^p \det(E_i)}}$$

ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$

$$\det(A) = ?$$

$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\frac{l_1}{2}$
change le det
(ça le divise par 2)

$\begin{matrix} l_4 - l_1 \\ l_2 - 3l_1 \\ l_3 + 3l_1 \end{matrix}$
ne chang. pas le det

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$l_3 + 4l_2$
(det inchangé)

$l_4 - \frac{l_3}{2}$
(det inchangé)

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{\det(U)}{\prod_{i=1}^6 \det(E_i)} = \frac{-18}{1/2} = -36$$

§ Règle de Cramer :

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible, alors $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

l'éq. $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une seule solution :

on multiplie * par A^{-1} de part et d'autre

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_n} \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$$

(c'est l'analogie de $ax=b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$ $a \neq 0$)

Problème : le calcul de A^{-1} est cher.

Règle de Cramer (pour le calcul de la
ième coordonnée de $\vec{x}$)
sol de $A\vec{x}=\vec{b}$

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

invertible et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, alors
l'unique solution $\vec{x}$ de $A\vec{x}=\vec{b}$ a pour
ième coordonnée

$$x_i = \frac{\det(A_i(\vec{b}))}{\det(A)} \quad \leftarrow \text{calcul de 2 déterminants}$$

où $A_i(\vec{b}) = \left(\vec{a}_1 \mid \dots \mid \vec{b} \mid \dots \mid \vec{a}_n \right)$

↑
ième colonne de A
remplacée par $\vec{b}$

↑ bien pratique pour calculer 1 coordonnée
sans avoir les autres

(sans doute)
sur demande

Remarque : Multiplier une ligne (ou colonne)
de A par $k \in \mathbb{R}$

multiplie le $\det(A)$ par k

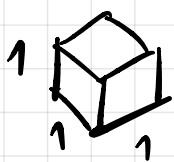
donc pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

donc le $\det$ "se comporte"

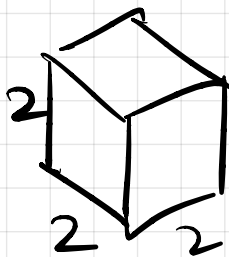
comme une surface dans $\mathbb{R}^2$

un volume dans $\mathbb{R}^3$



$$\text{Vol} = 1$$

$\times 2$
 $\rightsquigarrow$



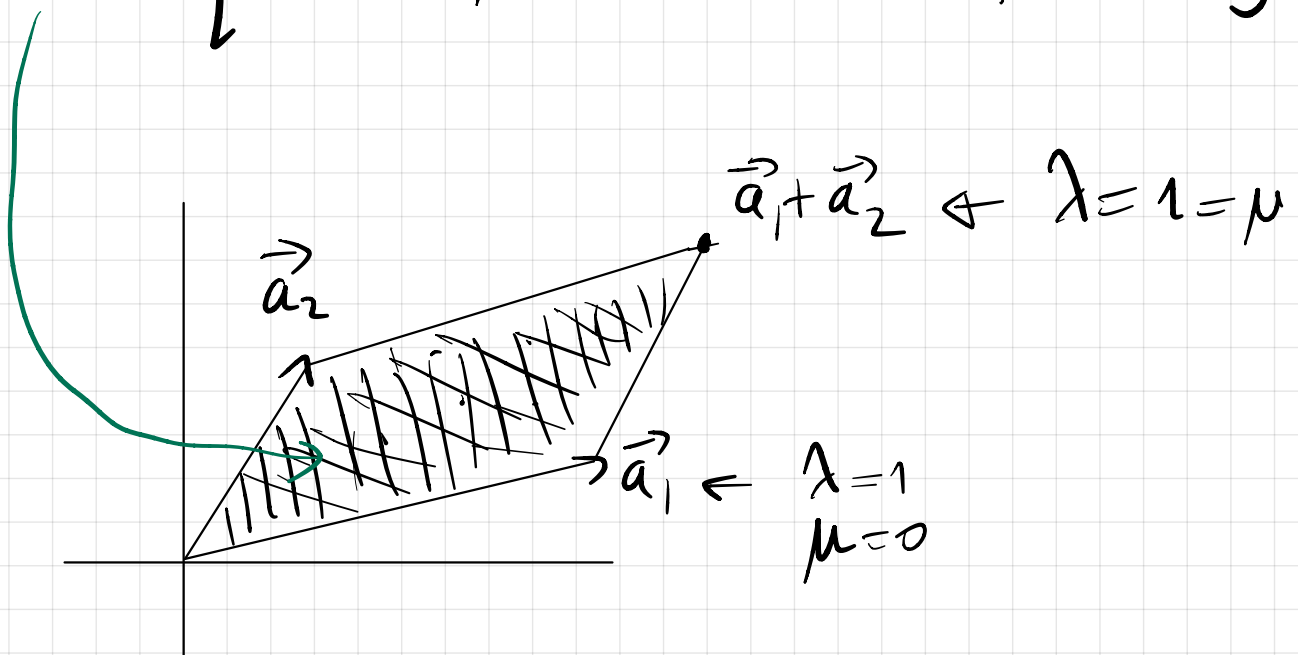
$$\text{Vol} = 8 = 2^3$$

§ 3.3 Interprétation géom. du déterminant

Def : $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ vect. (colonne)

1) le parallélogramme engendré par $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$
est

$$P = \{ \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2 \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2$$



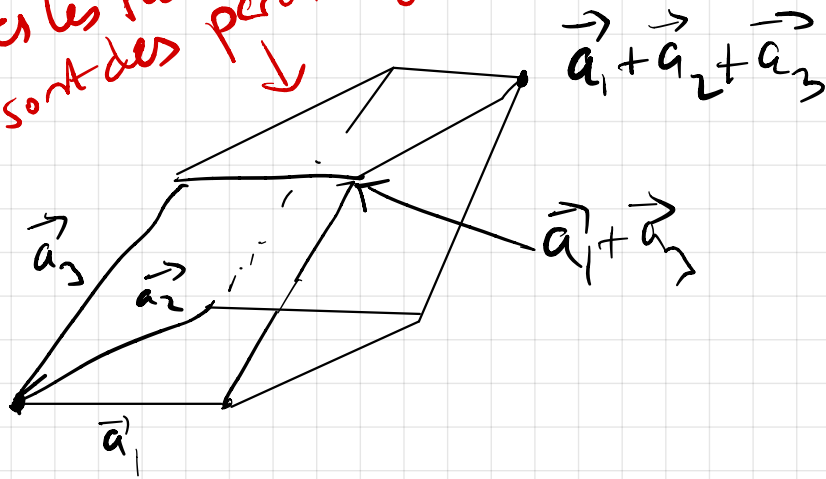
Rappel : Aire (P) = base $\times$ hauteur ≥ 0

2) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$

le parallélépipède engendré par $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$
est l'ens.

$$P = \left\{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1 \right\}$$

toutes les faces
sont des parallélogr.
↓



Rappel : $\text{Vol}(P) = \text{Aire (base)} \times \text{hauteur}$

$$\text{Vol}(P) \geq 0$$

↑
une base
est un parallélogramme

On a le résultat suivant :

Théorème sans nom

1) $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ ses colonnes
Soit P le parallélogramme eng. par $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$

$$\text{alors } \text{Aire}(P) = |\det(A)|$$

← valeur absolue

2) $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ses colonnes
 P le parallélépipède eng. par $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$
alors

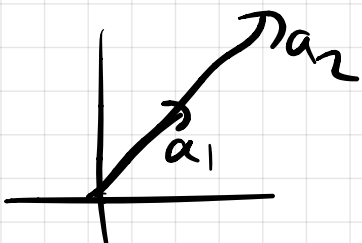
$$\text{Vol}(P) = |\det(A)|$$

← valeur absolue!

Idée de démo:

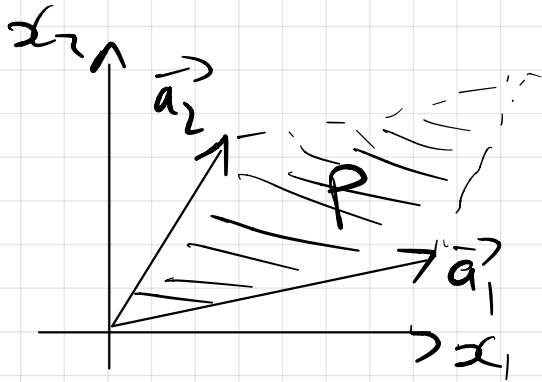
1) $n=2$, supp. $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ lin dépendantes

alors $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont alignés, donc P est aplati

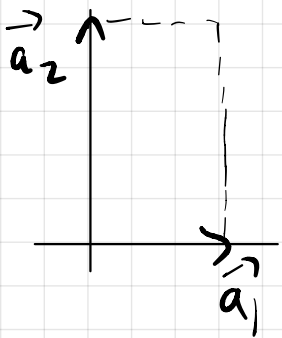


donc $\text{Aire}(P) = 0$
et $\det(A) = 0$

Supp, que les col. de A soient lin. indép.



cas évident: supp. P soit un rectangle alignés sur ox_1, ox_2



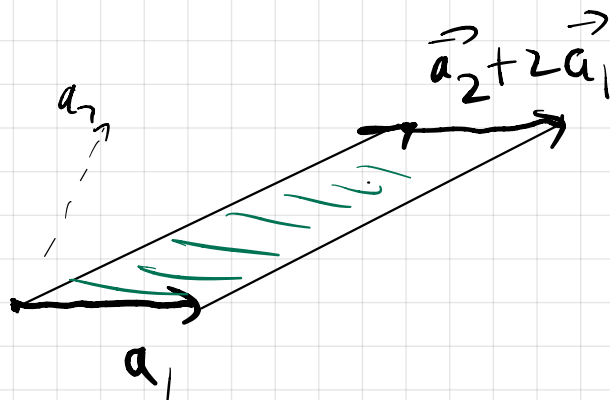
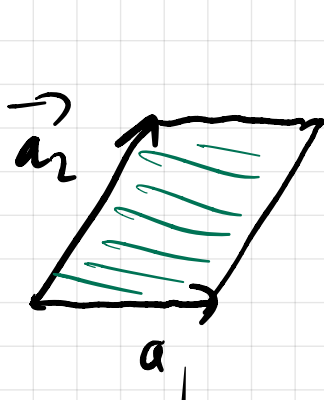
$$\text{càd } \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$\text{Aire}(P) = |ad| = \left| \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right|$$

✓

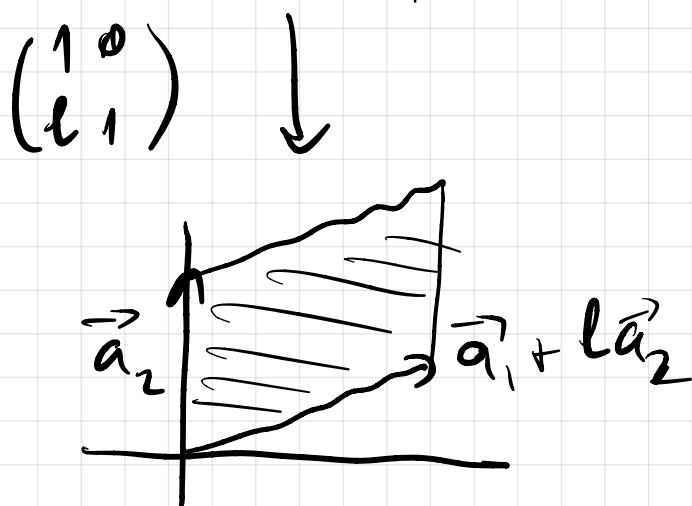
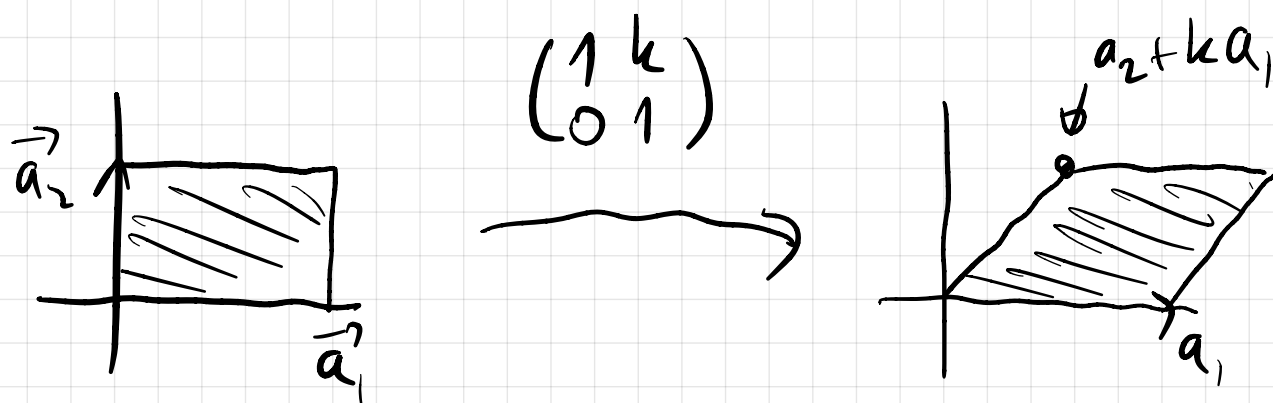
cas général:

Remarque: l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ est égale à celle du parallélogramme engendré par $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2 + k\vec{a}_1$ ($k \in \mathbb{R}$)



base $\times$ hauteur = base $\times$ hauteur (même hauteur!)

Ce procédé nous dit qu'on peut redresser les parallèles en rectangles en faisant des opérations sur les colonnes de A qui ne changent pas la surface



Donc, en échelonnant $A = (\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2)$

par des opérations de type $E_{i,j}(h)$

et de type $P_{i,j}$

(qui ne changent pas $|\det(A)|$)

on ne change pas l'aire du parallélog.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\text{opérations}} & P' \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \\ & & \text{rectangle} \end{array}$$

$$|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |\det \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}| = |a'd'| = \text{Aire}(P') = \text{Aire}(P)$$

cas $n=3$: analogue

cqfd.

$$\begin{array}{ccc} A = (\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \vec{a}_3) & \xrightarrow{\text{opérations}} & \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} = A' \\ \uparrow \text{parallépipède} & \text{qui ne} & \uparrow \text{parallépipède} \\ \text{quelconque} & \text{change pas} & \text{rectangle} \\ & |\det A| & \end{array}$$

$$\text{Vol}(P) = \text{Vol}(P') = |a'b'c'| = |\det(A')| \\ = |\det(A)|$$

qfd.

Remarque,

Tout cela se généralise à $\mathbb{R}^n$:

On peut définir le parallélotope
engendré par $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

$$P = \left\{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1 \right\}$$

$P \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{Hyper-Vol}(P) = \left| \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \right|$$

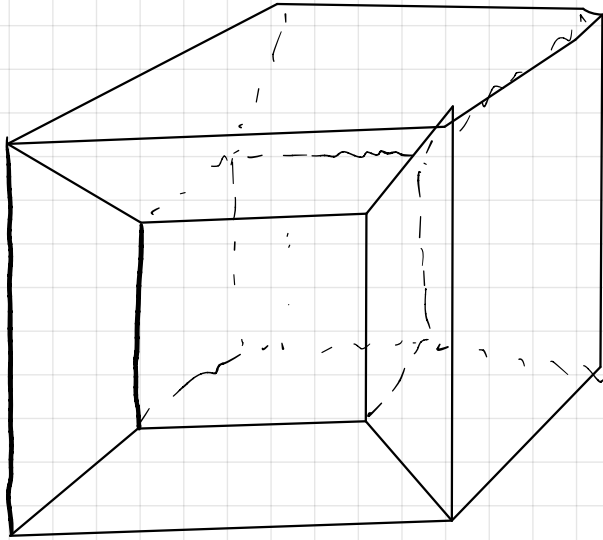
ex: Dans $\mathbb{R}^4$ on peut considérer

l'hyper-cube engendré par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$

$$P = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$0 \leq \lambda_i \leq 1$

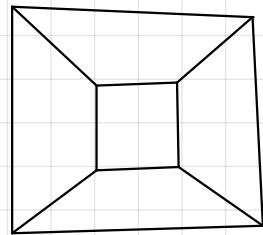
1' Arche de la défense, Paris (1989)



projection de
l'hyper-cube
dans $\mathbb{R}^3$
OMG!

16 sommets
32 arêtes
24 faces
8 cubes

polytope régulier en dim 4.



(ceci n'est
pas demandé à l'examen!)